Partie A : Cours

Partie B :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. (a) L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Or, on a : $f'(x) = 3x^2 - 2\times 2x + 0 = 3x^2 - 4x$, d'où $f'(2) = 4$.
   $f(2) = 1$.
   L'équation de T est : $y = 4(x-2)+1$ donc $\boxed{y = 4x-7}$.

   (b) D'après la calculatrice, il semble que la courbe $\mathscr{C}$ soit au-dessus de la tangente T.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (4x-7)$$

.

   (a) On remarque que $g(x)$ est la différence entre les points de $\mathscr{C}$ et de T ayant pour abscisse x.
   g est dérivable comme différence de fonctions dérivables.
   Pour tout x, $g'(x) = f'(x) - 4 = 3x^2 - 4x - 4$ donc $\boxed{g'(x) = 3x^2 - 4x - 4}$

   (b) $g'(x)$ est un trinôme du second degré : $\Delta = 64 > 0$; $g'(x)$ a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{64}}{6} = -\dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+8}{6} = 2$.
   Alors : $g'(x) = 3\left(x + \dfrac{2}{3}\right)(x-2)$.
   $g'(x)$ est du signe de 3, coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.
   Tableau de signes de $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (c) On a $g\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{256}{27} > 0$ et $g(2) = 0$ (évident puisque T est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisses 2).
   Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. (a) $g(-2) = 0$. Donc d'après le tableau de variation de g, on en déduit que $g(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,-2]$ et positif sur $[-2\,;\,+\infty[$.

   (b) On retrouve que $\mathscr{C}$ est au-dessus de T, sur $[-2\,;\,+\infty[$.

Erreurs commises :

- Récurrence mal rédigée
- Erreur de calcul de la dérivée.
- Bien rédiger les phrases en français.
- N'hésitez pas à faire des tableaux séparés pour ne pas tout mélanger.